力学第一の試験問題解説

鈴木 勝　　　　　08/08/02

---

1. **共通問題**
鉛直線に沿って落下するの質点 (質量 m) に，速度に比例した抵抗力が作用する．抵抗力の大きさは cv (v は質点の速さ，c は正の比例定数) と表される．鉛直線を x 軸 (**鉛直下方を正方向とする**) に取り，質点の運動を調べよう．以下に答えよ．ただし重力加速度の大きさを g とする．[配点 30 点]
   (a) 運動方程式から出発して質点の速度 $v(t)$ を求めよ．ただし $t = 0$ において $v = 0$ とする．
   (b) 質点の落下距離 $x(t)$ を求めよ．ただし $t = 0$ において $x = 0$ とする．
   (c) 次の A ∼ C に入る式を求めよ (結果だけでなく導出過程あるいは理由を述べること).
   時間 t がある値 $\boxed{\text{A}}$ に比べて十分に大きくなると，
   速度 v はほぼ一定値 $v \cong \boxed{\text{B}}$ になり，
   距離 x は t と線形な関係式 $x \cong \boxed{\text{B}}\, t - \boxed{\text{C}}$ で表される．

(a)『運動方程式は何を表しているか』を式と現象とキチンと結びつけて理解することが必要です．それは，左辺が物体の（運動の）性質,『質量』と『加速度』が,『力』（この性質は運動方程式ではなくほかの物理法則で決まるものです.）運動方程式のありがたいところは，**「力の性質だけを考えれば加速度が決まる」**ことです．つまり，一般的成り立つ式

$$m\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \vec{F}$$

に力（の性質）を代入すれば良いことになります．１つの物体に複数の力が働いているときには,力をベクトルとして加え合わせた力（合力）を $\vec{F}$ とします.

この問題の運動は直線上の運動ですから，ベクトルの式である運動方程式の１成分（１つ方向の運動）だけ考えれば十分です．こらからは１成分だけを考えます．さて座標を選ぶと力が**式**で書けることになります．x 軸を鉛直下方を正方向とすると，速度 $v = \frac{dx}{dt}$ も下向きに運動しているときに正となります．質量 m の質点に働いている力は $\vec{F}$ は重力と抵抗力です．重力はつねに鉛直下方に働きますから $F_g = mg$ となります．抵抗力は質点の運動方向により力の働く方向が変わることに注意してください．質点が上方に運動するときは力は鉛直下方に働きます．一方，質点が鉛直下方に運動するときは力は上方になります．この力を式で表すとどちらの場合も速度 v を使うと $F_r = -cv$ と表すことができます.

力が速度 v を使って表されているので加速度も速度 v を使って表すことにします．したがって運動方程式は,

$$m\frac{dv}{dt} = mg - cv$$

となります．運動方程式を解析的に（つまり式のかたちで）解くことは難しいことです．しかしいくつかの簡単な場合には，解くことができます．これはその例で,

$$m\frac{dv}{dt} = f(v)$$

のように力が速度だけの関数で与えられている場合には，左辺は速度 v のみの関数，右辺は時刻 t のみの関数

$$\frac{dv}{f(v)} = \frac{dt}{m}$$

と変形して両辺を積分します．不定積分には積分定数が付くことを忘れないでください．この積分定数は初期条件 ($t=0$) での運動の状態で決まります．さて，具体的に計算すると，

$$\frac{dv}{g - \frac{c}{m}} = dt$$

より積分の公式を使うと，

$$-\frac{m}{c}\log(g - \frac{c}{m}v) = t + A$$

となります．この A は積分定数です．この式を見やすいように整理すると以下になります．

$$v(t) = \frac{mg}{c} - \frac{m}{c}e^{-\frac{c}{m}(t+A)}$$

初期条件から積分定数を決めます．問題では $t=0$ で $v(0)=0$ ですから，$g = e^{-\frac{c}{m}A}$ です．

$$v(t) = \frac{mg}{c}(1 - e^{-\frac{c}{m}t})$$

(b) この問題も $v = \frac{dx}{dt}$ に注意すれば，

$$\frac{dx}{dt} = \frac{mg}{c}(1 - e^{-\frac{c}{m}t})$$

と書くことができて，右辺は距離（位置）x のみの関数，左辺は時刻 t のみの関数となります．具体的には

$$dx = \frac{mg}{c}(1 - e^{-\frac{c}{m}t})\,dt$$

となり，両辺を積分して初期条件（$t=0$ で $x(0)=0$）より以下になります．

$$x(t) = \frac{mg}{c}(1 - e^{-\frac{c}{m}t})$$

したがって

$$x(t) = \frac{mg}{c}t - \frac{m^2g}{c^2}(1 - e^{-\frac{c}{m}t})$$

(c) 抵抗力が働く落下運動で時間が十分にたつとどのような運動でしょうか．まずその様子が浮かばなくてはいけません．小さな雨粒か空の高いところから落ちてくることを思い浮かべると一定の速さで落下すると予想されます．それが上に求めた式に表れているでしょうか．速度の式は t が十分大きいとき指数関数の肩が負の大きな値になります．したがって，$t \to \infty$ $e^{-\frac{c}{m}t} \to 0$．この部分を 0 とおけばよいことになります．また距離（位置）についても同様です．

$$v = \frac{mg}{c}$$

$$x = \frac{mg}{c}t - \frac{m^2g}{c^2}$$

確かに速度は一定になります．どのような時間であればこのようになるか，ですが条件は $\frac{c}{m}t \gg 1$，したがって

$$t \gg \frac{m}{c}$$

です．この式を見ると抵抗力が大きいとき，つまり c が大きいときは早く一定の速度になります．

ちなみに，時間が十分にたったあとの速度だけを求めるなら，運動方程式で加速度を 0 とすることで求められます．

2. 力場が $\vec{F} = (\ ax\ , bx + ay\ )$（ただし，$a$，$b$ は定数）と与えられている．以下の問に答えよ．(図は省略）[配点 16 点]

(a) 図に示した O→P の 2 つの道のりについて，力のなした仕事 W を求めよ．

(b) 力場が保存力であるための定数 b の条件を求めよ．

(a) 仕事 W を計算せよ，という問題ですから仕事の**定義式**を覚えていなければなりません．力学で使われる言葉の多くは定義式がありますからそれと言葉はセットにして覚えます．仕事 W は,

$$W = \int_{\text{道のり}} \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

が定義式です．ここで $\cdot$ を落とさないように注意してください．この記号はスカラー積（内積）の記号です．またこの積分は「線積分」とよばれ道のりに沿って数字を足しあわせることを意味します．さて，$\vec{F} \cdot d\vec{r}$ はスカラー積の約束により $F_x dx + F_y dy + F_z dz$ ですから,

$$W = \int_{\text{道のり}} F_x dx + \int_{\text{道のり}} F_y dy + \int_{\text{道のり}} F_z dz$$

となります．ここでは F_x と dx の間には $\cdot$ は必要ありません．始めの式はベクトル $\vec{F}$ と $d\vec{r}$，あとの式は，ベクトルの成分（これはスカラー）ですから $\cdot$ を書かないのです．また $\vec{F} \times d\vec{r}$ と書いてもいけません．

x 軸に沿って進んで，その後 x が一定で y 方向に進む道のりについて考えましょう．x 軸に沿って進んでいるときは，$y = 0$ ですから，点 $(x, 0)$ での力は，$\vec{F} = (ax, bx)$ です．x は 0 から x_0 まで変化します．一方，y は 0 から 0 と変化しません．x 軸に沿った道のりでの仕事を W_1 として具体的に式を書くと,

$$W_1 = \int_0^{x_0} ax\ dx + \int_0^0 ax\ dy = \frac{1}{2}ax_0^2$$

次に，x が一定で y 方向に進むところでは，x の値は常に $x = x_0$ です．したがって，点 (x_0, y) では力は $\vec{F} = (ax_0, bx_0 + ay)$ です．この仕事を W_2 とすると,

$$W_2 = \int_{x_0}^{x_0} ax_0\ dx + \int_0^{y_0} (bx_0 + ay)\ dy = bx_0y_0 + \frac{1}{2}ay_0^2$$

となります．したがって道のり全体では以下になります．

$$W_{c2} = W_1 + W_2 = \frac{1}{2}ax_0^2 + bx_0y_0 + \frac{1}{2}ay_0^2$$

同様にして,

$$W_{c1} = \frac{1}{2}ax_0^2 + \frac{1}{2}ay_0^2.$$

(b) 保存力の条件である 2 つの道のりで仕事が等しい，から b の条件は $b = 0$ となります．

3. x-y 平面上で位置エネルギー（ポテンシャル）が $U(x,y)=ax^2+by^2$ （ただし，a，b は定数）と与えられている．位置 P (x_0 , y_0) での力 $\vec{F}=(\ F_x\ ,F_y\ )$ を求めよ．[配点 8 点]

ポテンシャルが与えられたとき，力とポテンシャルは計算式ではどのように結びつけられているでしょうか．一般に力はポテンシャルから

$$\vec{F}=(F_x,F_y,F_z)=\left(-\frac{\partial U}{\partial x},-\frac{\partial U}{\partial y},-\frac{\partial U}{\partial z}\right)$$

と与えられます．このように，力も 3 つの数字の組で書きます.（この問題は 2 次元ですのでこのなかの F_x と F_y について答えれば十分です.）偏微分 $\frac{\partial}{\partial x}$ はごく簡単で x で偏微分するきは y も係数も定数と思いなさいということです．これから，**マイナス**の符合を忘れてはいけません.（坂を下る方向に力が働くことを考えればマイナスの符合を忘れることはないと思うのですが $\ldots$.）答えは $x=x_0$，$y=y_0$ を代入して次になります.

$$\vec{F}=(-2ax_0,\ \ -2by_0)$$

---

4. x-y 平面上で質量 m の質点が $\vec{r}(t)=(\ A\cos(\omega t)\ ,B\sin(\omega t)\ ,0\ )$ （ただし，A，B，ω は定数）と表される運動をしている．以下に答えよ．[配点 16 点]
   (a) 力 $\vec{F}$ がつねに座標の原点を向いていることを示せ.
   (b) 角運動量ベクトル $\vec{\ell}=(\ \ell_x\ ,\ \ell_y\ ,\ \ell_z\ )$ を求めよ.

(a) 質点の位置が時間の関数として与えられていれば力を求めることができます．加速度と力は運動方程式

$$m\frac{d^2\vec{r}}{dt^2}=\vec{F}$$

で結びつけられています．したがって，

$$\vec{F}(t)=(\ -m\omega^2A\cos(\omega t)\ ,-\ m\omega^2B\sin(\omega t)\ ,0\ )$$

となります．この式をみると，質点の位置ベクトル $\vec{r}(t)$ と平行で負の符号がついていますから，座標の原点を向いていることが分かります.

(b) 角運動量（ベクトル）の**定義**は何だったでしょうか．そして具体的にどのように計算するのでしょうか．角運動量を $\vec{\ell}$ とすると，基準点（この問題では原点）からの位置 $\vec{r}$ と速度 $\vec{v}$ を使って以下のように定義されます.

$$\vec{\ell}=\vec{r}\times m\vec{v}$$

ここで，位置，速度もベクトルですが，角運動量もベクトルであることに注意してください．また定義の中の $\times$ は**ベクトル積（外積）**の記号です．答えは角運動量はベクトルですから 3 成分を書きます.

具体的に計算するには，位置，速度の成分を知って行列式で計算をするのが便利です．

$$\vec{\ell} = \vec{r} \times m\vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ A\cos(\omega t) & B\sin(\omega t) & 0 \\ -m\omega A\sin(\omega t) & m\omega B\cos(\omega t) & 0 \end{vmatrix}$$
$$= (\ 0,\ \ 0,\ \ mAB\omega\ )$$

この問題の角運動量ベクトルは時間に依らないことが分かります．これは (a) で示した力の性質（力はつねに座標の原点を向いている）から来ています．

---

5. 水平な摩擦のない台の上で，ばね定数 k のばねに質量 m の小物体をつなぎ，釣り合いの位置から時刻 $t=0$ において初速 v_0 でばねの伸びの方向に運動させた．この小物体の運動を調べよう．x 軸をばねの伸びの方向に取り，座標の原点を釣り合いの位置として，以下に答えよ．[配点 30 点]
   (a) 運動方程式を書け．
   (b) 運動方程式の解が，$x(t) = A\cos(\sqrt{\frac{k}{m}}t) + B\sin(\sqrt{\frac{k}{m}}t)$ で与えられることを説明せよ．
   (c) 初期条件を用いて時刻の関数として，小物体の位置 $x(t)$、速度 $v(t)$ の式を求めよ．また横軸を時刻 t，縦軸を位置 $x(t)$ または速度 $v(t)$ としてグラフに表せ．
   (d) 時刻の関数として，運動エネルギー $K(t)$、位置エネルギー（ポテンシャル）$U(t)$ の式を書け．また横軸を時刻 t、縦軸を $K(t)$ または $U(t)$ としてグラフに表せ．
   (e) この運動では力学的エネルギーが保存されることを示せ．

(a) 運動方程式を書くことが力学の出発点です．ばねの力は自然長からののびに比例します．座標の原点を力が働かない自然長に選ぶと

$$F = -kx$$

と与えられます．ここで負の符号は原点に引き戻されることを意味まします。つまり，$x > 0$ ならば x を小さくする方向へ，$x < 0$ ならば x を大きくする方向に運動が起こります．このようにどちら向きに運動が起こるか考えて符号をつけます．したがって運動方程式は，

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx$$

です．ここで，

$$m\frac{dv}{dt} = -kx$$

と書いている人がいました．間違いではないのですが良い書き方ではありません．右辺の力が速度で与えられていたら，$m\frac{dv}{dt}$ と書き，右辺の力が位置で与えられていたら $m\frac{d^2x}{dt^2}$ と書くのがエレガントです．

(b) この運動方程式の解き方はいくつかありますが, その解き方は教科書を参考にして下さい．キチンと運動方程式の解いてくれたひともいました．もちろんそれで正解です．ここではどのような運動になるかここでは与えられています．それを確認するには，その式を運動方程式に代入して等式が成り立つことを確かめれば十分です．

(c) (b) で与えた式には，定数 A と B があります．この 2 つの定数は初期条件から決まります．初期条件は問題から $t=0$ のとき $x(0)=0,\ v(0)=v_0$ です．(b) の式とそれを時間微分した速度の

式に代入します.

$$0 = A$$
$$v_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}B$$

したがって

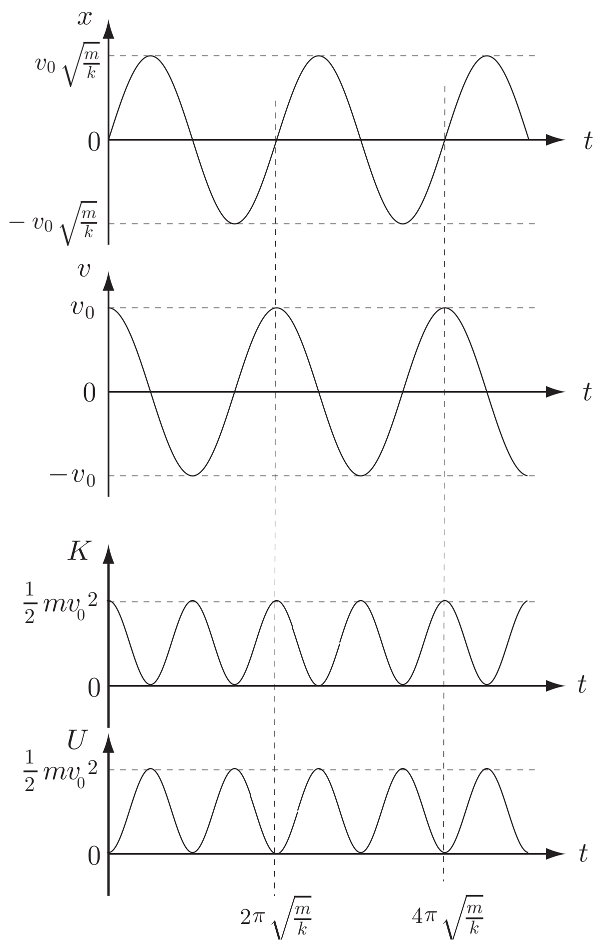
$$x(t) = \sqrt{\frac{m}{k}}v_0 \sin(\sqrt{\frac{k}{m}}t)$$
$$v(t) = v_0 \cos(\sqrt{\frac{k}{m}}t)$$

と，位置は sin 関数，速度は cos 関数です.

(d) 運動エネルギーは $K = \frac{1}{2}mv^2$ で与られます．また，位置エネルギー (ポテンシャル) は，座標の原点をばねの自然長に選んだことにより，$\frac{1}{2}kx^2$ で与られます．これの式に (c) の式を代入すると

$$K(t) = \frac{1}{2}mv_0^2 \cos^2(\sqrt{\frac{k}{m}}t)$$
$$U(t) = \frac{1}{2}mv_0^2 \sin^2(\sqrt{\frac{k}{m}}t)$$

となります．ここで，(c)(d) のグラフを書きます。グラフには縦軸横軸に目盛りを入れなくてはいけません．また，運動エネルギーのグラフは，sin 関数または cos 関数の形ですので注意してください.（$cos^2\theta = \frac{1+\cos(2\theta)}{2}$，$sin^2\theta = \frac{1-\cos(2\theta)}{2}$ の関係があります.）



(e)(d) の 2 つの式をたせば良いだけです．ここで $\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$ の関係を使います．